

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Números Transcendentes

Wagner Wilson Pereira de Carvalho

JOÃO PESSOA – PB
OUTUBRO DE 2018

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Números Transcendentes

por

Wagner Wilson Pereira de Carvalho

sob a orientação da

Prof^a. Dr^a. Miriam da Silva Pereira

João Pessoa – PB
Outubro de 2018

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

C331n Carvalho, Wagner Wilson Pereira de.
Números Transcendentes / Wagner Wilson Pereira de
Carvalho. - João Pessoa, 2018.
49 f. : il.

Orientação: Miriam Pereira.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. números transcendentés. 2. números de Liouville. 3.
números algébricos. I. Pereira, Miriam. II. Título.

UFPB/BC

Números Transcendentes

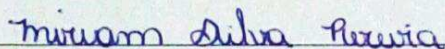
por

Wagner Wilson Pereira de Carvalho

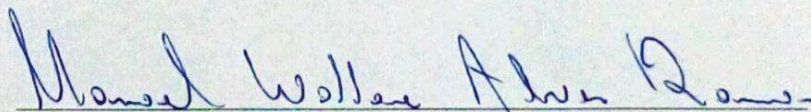
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 29 de outubro de 2018.

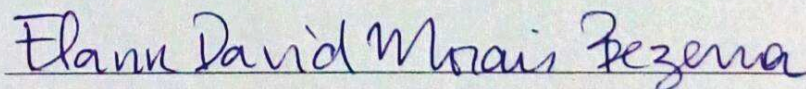
Banca Examinadora:



Prof^a. Dr^a. Miriam da Silva Pereira – UFPB
(Orientadora)



Prof. Dr. Manoel Wallace Alves Ramos – IFPB
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra – UFPB
(Examinador Interno)

Aos meus pais
José e Cosma

Agradecimentos

A Deus, pois tudo o mais ocorre por Ele.

A minha esposa Patrícia por esta sempre amorosamente ao meu lado.

Aos meus pais, José e Cosma, por todo apoio e educação.

A minha família por estarem incondicionalmente ao meu lado.

A professora Doutora Miriam da Silva Pereira pela orientação para este trabalho,

Aos professores pelo esforço e dedicação durante todo o curso. Destacando: Lenimar, pelo ensino da linguagem LaTeX, com a qual foi desenvolvido esse trabalho; Flank Bezerra, pelos tópicos extras e forma de abordagem no ensino, motivando a curiosidade para a amplitude da matemática; Bruno Ribeiro e Eduardo Santos, pela coordenação do curso e principalmente pelas aulas enriquecedoras; Carlos Bocker, Pedro Hinojosa e Elissandra Gloss que complementaram o conhecimento e experiência em nossas aulas, desafiando-nos a nos esforçarmos.

Ao IMPA, SBM e UFPB pelo desenvolvimento deste Programa de Mestrado.

Aos meus colegas, Bruno, Demétrius, Marcílio, Rodolfo, Thalita, Joelson, William, Rodrigo, pelos momentos e aprendizados compartilhados.

Aos meus colegas estudantes e professores da graduação pois foram essenciais durante a formação da base que me permitiu chegar aqui.

A todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram nessa jornada.

Resumo

Neste trabalho, estudamos números algébricos e números transcendentos no contexto dos números reais. Usando resultados relacionados ao conceito enumerabilidade apresentamos uma prova da existência de números transcendentos proposta por Cantor. Além disso, apresentamos a definição da constante de Liouville e mostramos que ela é um número transcendente. Finalizamos tratando alguns aspectos dos conjuntos numéricos e as operações elementares definidas em tais conjuntos, destacando a importância da maneira como estes conceitos devem ser tratados na Educação Básica.

Palavras-chave: números transcendentos, números de Liouville, números algébricos.

Abstract

In this work, we study algebraic and transcendent numbers in the context of real numbers. By some results, concerning the enumerability concept we show an evidence of the existence of transcendental numbers proposed by Cantor. Besides, we present the Liouville's constant definition and show that it is a transcendent number. We finish by bringing up some aspects of the numerical sets and the elementary operations defined in those sets, detaching the importance of the way those concepts should be treated in the Basic Education.

Keywords: transcendental numbers, Liouville's numbers, algebraic numbers.

Sumário

Introdução	1
1 Números Algébricos e Transcendentes	3
1.1 Conjuntos Enumeráveis	3
1.2 Números Algébricos e Transcendentes	10
2 Os Números de Liouville	17
2.1 Aproximações de Números Irracionais	17
2.2 Os Primeiros Exemplos de Números Transcendentes	21
3 Outros Números Transcendentes	28
3.1 O número π é transcendente	28
4 Números na Educação Básica: Algumas Observações	38
4.1 Base Nacional Comum Curricular	38
4.2 Conjuntos Numéricos	41
4.3 Os Números Algébricos - O ϕ (φ)	44
4.4 O Número π	45
4.5 Considerações Finais	46
Referências Bibliográficas	48

*Uma verdade matemática
não é simples nem compli-
cada por si mesma. É uma
verdade.*

Emile Lemoine

Introdução

Abordamos brevemente os principais conjuntos numéricos estudados na Educação Básica, para então introduzirmos duas classificações para números não normalmente apresentadas na Educação Básica: os números algébricos e os números transcendentais.

A necessidade de contar e de ordenar é bastante comum na vida, sendo essa a razão dos primeiros números terem sido os números naturais.

Novas necessidades envolvendo saldos, dívidas, temperaturas e alguns problemas físicos motivaram o surgimento dos números inteiros.

O quociente entre dois números inteiros passa a ser utilizado para representar grandezas e medidas.

O problema envolvendo a medida da diagonal de um quadrado em função do seu lado. Traz a incomensurabilidade entre essas medidas e o surgimento dos primeiros números irracionais.

O conjunto dos números reais pode ser visto como união disjunta do conjunto dos números racionais e do conjunto dos números irracionais.

As equações polinomiais podem possuírem entre suas raízes, números irracionais ou números racionais. Seja A o conjunto de todas as equações polinomiais com coeficientes inteiros, o conjunto formado pelos números que são raiz de pelo menos uma equação polinomial do conjunto A é chamado conjunto dos números algébricos.

O conjunto formado por todos os números reais que não são números algébricos é chamado conjunto dos números transcendentais.

Tratamos da enumerabilidade de conjuntos, das definições de números algébricos e números transcendentais, da prova da existência de números transcendentais, do primeiro número provado como transcendente na história da matemática.

Nosso trabalho, está dividido:

No *Capítulo 1*, estudamos os números algébricos e transcendentais, sendo apresentada a definição de números algébricos, uma listagem de resultados sobre conjuntos enumeráveis e a abordagem do matemático Cantor para a prova da existência de números transcendentais.

O *Capítulo 2* é dedicado a resultados relativos aos números de Liouville, principalmente a constante de Liouville, sendo esses os primeiros números que tiveram sua transcendência provada.

No *Capítulo 3*, trazemos mais um exemplo de número transcendente, o número π , o número transcendente mais famoso e uma prova de sua transcendência. Além disso, citamos mais alguns exemplos de números transcendentos.

No *Capítulo 4*, falamos da recente Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e trazemos algumas considerações sobre números e operações aritméticas na educação básica, abordamos os conjuntos numéricos e suas particularidades, as representações dos números racionais como frações, e encerramos o mesmo com uma curiosidade sobre o número π .

Capítulo 1

Números Algébricos e Transcendentes

Neste capítulo apresentamos a definição de conjuntos enumeráveis e mostramos que alguns conjuntos numéricos conhecidos da educação básica são exemplos de conjuntos enumeráveis. Em seguida, definimos números algébricos e transcendentos e mostramos a existência de números transcendentos. Para tanto utilizaremos os trabalhos de Djairo Figueiredo [[5]], Diego Marques [[6]], Ivan Niven [[7]], José Plínio Santos [[10]], Martha Monteiro [[11]] e William Dunham [[12]] que sugerimos para um aprofundamento.

1.1 Conjuntos Enumeráveis

Definição 1.1. Um conjunto X é finito se é vazio, ou quando existe uma bijeção entre o conjunto $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ e o conjunto X , assim podemos escrever $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Definição 1.2. Um conjunto X é dito enumerável quando ele é finito ou quando existe uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \rightarrow X$, onde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Assim,

$$f(1) = x_1, f(2) = x_2, f(3) = x_3, \dots, f(n) = x_n, \dots$$

Exemplo 1.1. O conjunto dos números naturais é um conjunto enumerável. Basta tomar a função identidade $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ com a regra $f(n) = n$ para realizar a bijeção.

$$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3, \dots, f(n) = n, \dots$$

Exemplo 1.2. Denotamos por \mathbb{N}_p o conjunto dos números pares. Então, \mathbb{N}_p é enumerável. De fato, consideramos a bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_p$ dada por $f(n) = 2n$. Note

que

$$f(1) = 2 \cdot 1 = 2, f(2) = 2 \cdot 2 = 4, f(3) = 2 \cdot 3 = 6, \dots, f(n) = 2n, \dots$$

De maneira análoga, se \mathbb{N}_i denota o conjunto dos números ímpares, então \mathbb{N}_i é enumerável. Basta considerar a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_i$ com a regra $f(n) = 2n - 1$ que é uma bijeção.

Exemplo 1.3. Se \mathbb{N}^2 denota o subconjunto formado pelos números naturais que são quadrados perfeitos, então \mathbb{N}^2 é enumerável. Basta considerar $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ com a regra $f(n) = n^2$ para realizar a bijeção.

Exemplo 1.4. Considere P o conjunto dos números primos e ordene P em ordem crescente, formando a listagem, $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$. Deste modo, obtemos uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow P$, onde

$$f(1) = P_1, f(2) = P_2, f(3) = P_3, \dots, f(n) = P_n, \dots$$

Então, P é enumerável.

Apresentar uma regra explícita para f do Exemplo 1.4 não é uma tarefa fácil e trata-se de um dos maiores problemas não resolvidos da matemática.

O próximo resultado descreve como podemos mostrar que alguns conjuntos são enumeráveis sem precisar construir uma bijeção, visto que isto nem sempre é uma tarefa fácil.

Teorema 1.1. *Todo subconjunto não-vazio de um conjunto enumerável é enumerável.*

Demonstração. Sejam X um conjunto enumerável e $A \subset X$. Se A for um conjunto finito, então A é enumerável. Caso A seja um subconjunto infinito, como X é um conjunto enumerável, existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ dada por $f(n) = x_n$. Assim,

$$f(1) = x_1, f(2) = x_2, f(3) = x_3, \dots, f(n) = x_n, \dots$$

Vamos agora definir n_1 como o primeiro número natural tal que $x_{n_1} \in A$. Em seguida, definimos n_2 como o menor número natural tal que $n_2 > n_1$ e $x_{n_2} \in A$. E, assim sucessivamente até termos encontrarmos $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ onde x_{n_k} é o menor número natural que é maior do que n_{k-1} e $x_{n_k} \in A$. Por hipótese, A é um conjunto infinito e podemos construir uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ com a regra $f(k) = x_{n_k}$. Então,

$$f(1) = x_{n_1}, f(2) = x_{n_2}, f(3) = x_{n_3}, \dots, f(k) = x_{n_k}, \dots$$

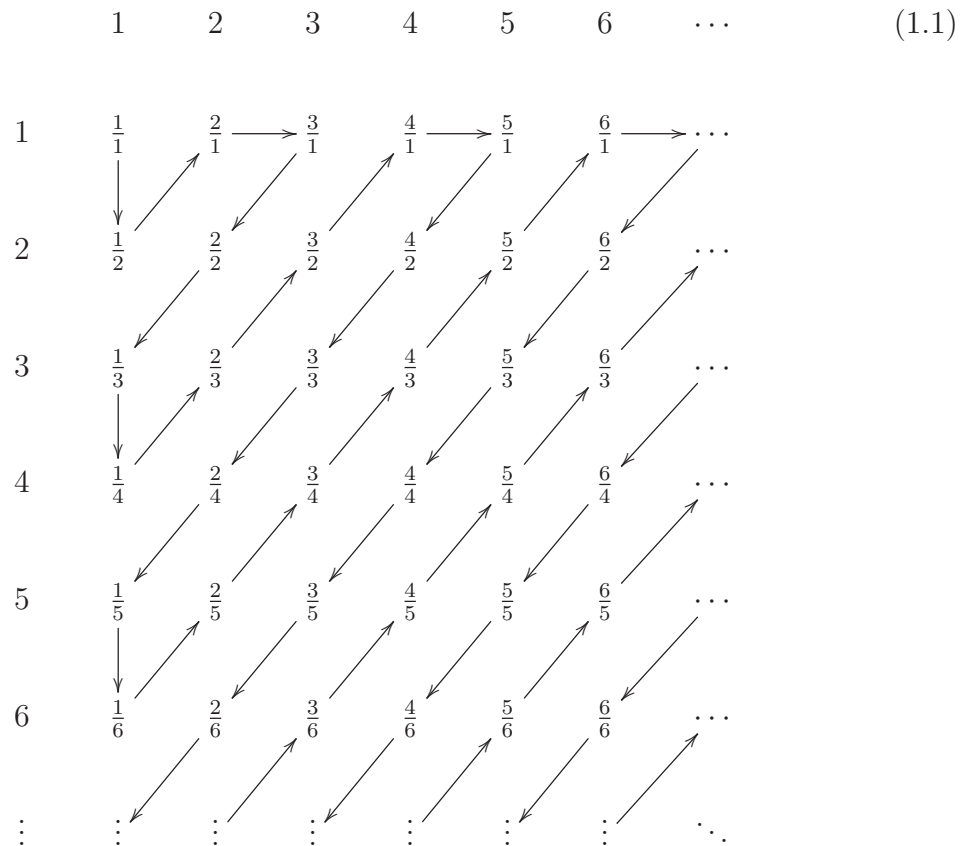
Portanto, A é enumerável. □

Assim, fica claro que todo subconjunto não-vazio dos números naturais é enumerável e, desta forma, já temos infinitos exemplos de conjuntos enumeráveis. São muitos fatos interessantes que chamam nossa atenção e provocam surpresas, principalmente no primeiro contato com essa abordagem. Mas, as surpresas continuam, vamos mostrar outro exemplo clássico e curioso de conjunto enumerável.

Exemplo 1.5. O conjunto dos números inteiros é enumerável. De fato, a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ com a regra $f(n) = \frac{1+(-1)^n(2n-1)}{4}$ é uma bijeção. Note que,

$$f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = -1, f(4) = 2, f(5) = -2, f(6) = 3, f(7) = -3, \dots$$

Exemplo 1.6. O conjunto dos números racionais positivos é enumerável. Uma forma de mostrar essa propriedade foi proposta por Cantor. A ideia consiste em organizar os números racionais positivos em linhas e colunas, onde as colunas organizam os numeradores, enquanto as linhas organizam os denominadores.



Agora começando da fração $\frac{1}{1}$, associando a mesma com o número natural 1, e seguindo conforme as setas, associando os números racionais do caminho com os próximos

números naturais $2, 3, 4, \dots$ e assim sucessivamente. Deste modo, construímos uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e os números racionais positivos de nossa tabela.

Podemos perceber que há repetições de números racionais, pois os mesmos não aparecem em sua forma irredutível, para resolver isso há várias maneiras, entre elas podemos simplesmente considerar a tabela completa e vendo que a mesma está em bijeção com os números naturais, sendo portanto enumerável, usar o Teorema (1.1) e concluímos que os números racionais positivos são enumeráveis. Alternativamente, poderíamos reescrever as frações em sua forma irredutível e ao seguir pela tabela, saltar as ocorrências repetidas, obtendo o mesmo resultado.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & (1.2) \\
 \\
 1 & 1 & 2 \rightarrow 3 & 4 \rightarrow 5 & 6 \rightarrow \dots & & & \\
 2 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 & \dots \\
 3 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2 & \dots \\
 4 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} & \dots \\
 5 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 1 & \frac{6}{5} & \dots \\
 6 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & 1 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{array}$$

Apresentamos alguns resultados sobre conjuntos enumeráveis que nos ajudarão a concluir a enumerabilidade para o conjunto dos números racionais e não apenas para o subconjunto formado pelos números racionais positivos. Além disso, concluímos que o conjunto dos números algébricos também é enumerável.

Teorema 1.2. *Sejam X e Y conjuntos enumeráveis. O conjunto $Z = X \cup Y$ é enumerável.*

Demonstração. Caso ambos os conjuntos sejam finitos, digamos X contendo m elementos e Y contendo n elementos. Podemos listar os elementos de X seguidos pelos elementos de Y , isto é, $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$ e o conjunto Z terá no máximo $m+n$ elementos. Caso $X \cap Y = \emptyset$, podemos listar os elementos do conjunto Z fazendo cada $x_i = z_i, i = 1, 2, \dots, m$, e seguida fazendo cada $y_j = z_{m+j}, j = 1, 2, \dots, n$, obtendo assim a seguinte enumeração para o conjunto

$$Z = \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_m, z_{m+1}, \dots, z_{m+n}\}.$$

Caso $X \cap Y \neq \emptyset$, procedemos de maneira análoga, listando os elementos do conjunto X e depois listando os elementos do conjunto Y tais que $y_j \notin X$, obtendo a enumeração

$$Z = \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_m, z_{m+1}, \dots, z_{m+k}\},$$

onde $k = n - p$ com p o número de elementos do conjunto $X \cap Y$.

Caso apenas um dos conjuntos seja finito, digamos o conjunto Y com número de elementos n , podemos começar listando os elementos dele y_j tais que $y_j \notin X$ e só depois continuarmos com os elementos de X , assim o conjunto

$$Z = X \cup Y = \{z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+k}, \dots\}.$$

Finalmente, se ambos os conjuntos são infinitos enumeráveis, podemos listar o conjunto $Z = X \cup Y$ primeiro alternando os elementos dos conjuntos do seguinte modo, $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots$. Assim, os elementos do conjunto Z seriam dados por $z_i = x_i$, se i ímpar e $z_i = y_i$ se i par.

Em todos os casos, o conjunto $Z = X \cup Y$ é enumerável. □

Corolário 1.3. A união finita de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

Demonstração. Sejam X_1, \dots, X_n conjuntos enumeráveis. Vamos provar o resultado usando indução sobre n , isto é, o número de conjuntos que compõe a união.

O caso $n = 2$ segue do Teorema 1.2. Suponhamos por hipótese de indução que $\bigcup_{k=1}^{n-1} X_k$ é enumerável, então,

$$\bigcup_{k=1}^n X_k = \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} X_k \right) \cup X_n.$$

Como a união de dois conjuntos enumeráveis segue que $\bigcup_{k=1}^n X_k$ é enumerável. \square

Teorema 1.4. *Se $f : X \rightarrow Y$ é injetiva e Y é enumerável então X é enumerável.*

Demonstração. Como Y é enumerável, existe uma função $g : Y \rightarrow \mathbb{N}$. Tomemos a função composta $h : g \circ f : X \rightarrow \mathbb{N}$. Como f e g são injetivas, h é injetiva. Portanto, $h : X \rightarrow h(X) \subseteq \mathbb{N}$ é uma bijeção. Segue do Teorema 1.1 que X é enumerável. \square

Nosso próximo objetivo é mostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é um conjunto enumerável. Para isso precisamos provar um resultado bem preliminar.

Teorema 1.5. *Todo número natural $n > 1$ se decompõe de maneira única, a menos da ordem, como produto de fatores primos.*

Demonstração. Inicialmente observamos que se n é primo não há o que ser demonstrado. Suponhamos então que n é um número natural composto. Seja p_1 , com $p_1 > 1$, o menor dos divisores positivos de n . Afirmamos que p_1 deve ser um número primo. De fato, caso contrário existiria p , com $1 < p < p_1$ sendo p um divisor de p_1 e, conseqüentemente, p seria divisor de n contradizendo a minimalidade de p_1 . Logo, $n = p_1 n_1$.

Se n_1 é primo a prova está completa. Caso contrário, tomamos p_2 como o menor divisor positivo de n_1 . Pelo mesmo argumento anterior, temos que p_2 é primo e, assim, $n = p_1 p_2 n_2$.

Prosseguindo desta forma, obteremos uma sequência decrescente de inteiros positivos n_1, n_2, \dots, n_r . Como todos esses são inteiros maiores do que 1, este processo deve terminar. Como os primos p_1, p_2, \dots, p_k não são, necessariamente, distintos, n terá a forma:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}. \quad (1.3)$$

Por indução em n podemos mostrar a unicidade da representação dada em 1.3. Para $n = 2$ a afirmação é trivialmente verdadeira. Suponhamos por hipótese de indução que para todo inteiro maior do que 1 e menor do que n a representação dada em 1.3 é única a menos da ordem dos fatores. Se n é primo, não há o que provar. Suponhamos que n seja composto e que

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_r^{\beta_r}.$$

Como p_1 divide o produto $q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_r^{\beta_r}$ segue que ele divide pelo menos um dos fatores q_j . Sem perda de generalidade podemos supor que p_1 divide q_1 . Como ambos são primos, isto implica $p_1 = q_1$. Logo, $n' = p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} = q_2^{\beta_2} \dots q_r^{\beta_r}$, onde $1 < n' < n$.

Assim, da hipótese de indução obtemos que as duas fatorações são idênticas, isto é, $k = r$ e $p_i = q_j$ para $i, j \in \{1, \dots, r\}$. \square

Teorema 1.6. *O conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.*

Demonstração. Definimos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\rightarrow 2^n 3^m \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.5, f é injetiva e, portanto, pelos Teoremas 1.1 e 1.4 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. \square

Uma consequência imediata do teorema anterior é que se X e Y são enumeráveis, então $X \times Y$ é enumerável. Apresentamos a seguir, um resultado que generaliza o Corolário 1.3.

Teorema 1.7. *Consideramos uma sequência de conjuntos infinitos enumeráveis $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, \dots$ e $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Então, U é enumerável.*

Demonstração. Já sabemos que U é infinito, pois $X_1 \subseteq U$. Colocando os elementos de cada X_n em uma lista infinita, e tomando cada lista como linha de uma matriz, de modo que a primeira linha seja formada por todos os elementos de X_1 , a segunda por X_2 , e continuando dessa maneira teremos a matriz.

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} & \cdots \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ e_{m1} & e_{m2} & \cdots & e_{mn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Os elementos dessa matriz são os elementos do conjunto U . Para mostrar que U é enumerável temos que colocar os elementos de U em uma lista sem repetições, vamos inicialmente colocá-los em uma lista que pode ter repetições já que não sabemos quais os elementos que se repetem na matriz.

$$e_{11}, e_{21}, e_{12}, e_{31}, e_{22}, e_{13}, e_{41}, e_{32}, e_{23}, e_{14}, \dots$$

Observe que a sequência dada tem uma regra de formação: primeiramente, começamos com os termos cuja soma dos índices é 2, depois os termos cuja soma dos índices é 3, e

assim por diante. Assim, como todos os elementos estão em uma sequência, o conjunto U , como subconjunto desta sequência, é enumerável, de acordo com o Teorema 1.1.

□

Notamos que para provar o último resultado utilizamos implicitamente que o produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Teorema 1.8. *O conjunto dos números racionais \mathbb{Q} é enumerável.*

Demonstração. Mostramos no Exemplo 1.6 que o conjunto dos números racionais positivos, \mathbb{Q}_+ é enumerável. Considerando a bijeção $f : \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{Q}_-$ temos que o conjunto \mathbb{Q}_- é enumerável. Além disso, o conjunto $\{0\}$ é finito e, portanto, enumerável. Assim, segue do Teorema 1.3 que o conjunto $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$ é enumerável. □

Um fato interessante a respeito da enumerabilidade de conjuntos, é que conjuntos enumeráveis infinitos, possuem a mesma cardinalidade, ou seja, é possível colocar um conjunto em bijeção com o outro, pois todos estão em bijeção com o conjunto dos números naturais. Este fato chegou a induzir Cantor¹ e outros matemáticos da época a pensarem que todos os conjuntos infinitos possuiriam a mesma cardinalidade, ou seja, que todos os infinitos seriam iguais, a história desse fascinante percurso pode ser consultada nos capítulos 11 e 12 de [[12]].

1.2 Números Algébricos e Transcendentes

Uma pergunta interessante é dentre todos os números reais quais são os mais frequentes: os algébricos ou os transcendentos? Sabemos que produzir números transcendentos é uma tarefa relativamente difícil e, dessa forma, podemos ser induzidos a imaginar que a quantidade de tais números é pequena. Porém, nesta seção veremos um teorema com uma demonstração muito interessante atribuída ao matemático alemão Cantor. Para os leitores que desejarem maiores detalhes acerca de Cardinalidade e sobre o Teorema de Cantor sugerimos principalmente a leitura dos Capítulos 11 e 12 de [12].

Definição 1.3. Dizemos que um número a é um número algébrico, quando a é solução de alguma equação polinomial da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad (1.4)$$

¹Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) foi um matemático alemão famoso por ter elaborado a moderna teoria dos conjuntos, o conceito de números transfinitos e uma prova da enumerabilidade dos números racionais. Morreu num hospital psiquiátrico em Halle, depois de sofrer com a pobreza durante a Primeira Guerra Mundial e ainda esgotado nervosamente pela descoberta do Paradoxo de Russell.

onde os coeficientes a_i são números inteiros. Um número que não seja algébrico é chamado número transcendente.

Observação: Qualquer número racional, $a = \frac{p}{q}$, é algébrico, porque a é raiz da equação $qx - p = 0$, onde $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$.

Existem também números irracionais que são algébricos, por exemplo, $\sqrt{2}$ é algébrico, pois é raiz da equação $x^2 - 2 = 0$. Generalizando esse exemplo, seja p um número primo, então \sqrt{p} é irracional e algébrico, sendo raiz da equação $x^2 - p = 0$. Agora, considerando as propriedades de fechamento dos números algébricos quanto à adição e multiplicação, podemos obter novos números algébricos e entre eles muitos irracionais algébricos, por exemplo, o número $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que é raiz da equação $x^2 - x - 1 = 0$.

Teorema 1.9. *Sejam $f(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros da forma (1.4) e a um número racional, raiz de $f(x) = 0$. Então, $x - a$ é um fator de $f(x)$, ou seja, existe um polinômio $q(x)$, tal que $f(x) = (x - a)q(x)$, onde $q(x)$ tem coeficientes racionais e o grau de $q(x)$ é uma unidade menor do que o grau de $f(x)$.*

Demonstração. Dividindo $f(x)$ por $(x - a)$ obtemos um quociente $q(x)$ e um resto $r(x)$ onde o grau do resto menor do que o grau de $x - a$ que tem grau 1. Assim, $r(x)$ é um polinômio constante. Então,

$$f(x) = (x - a)q(x) + r(x),$$

onde $q(x)$ é um polinômio com coeficientes racionais. Mas $0 = f(a) = r(x)$, isto é, $r = (x)0$. \square

Nosso próximo objetivo é mostrar que o conjunto dos números algébricos é enumerável. Para isso, precisamos do seguinte resultado preliminar.

Lema 1.10. Qualquer equação da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad (1.5)$$

tem, no máximo, n raízes distintas.

Demonstração. Vamos começar supondo que a Equação (1.5) tenha $n + 1$ raízes distintas, a saber $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}$ e seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Agora, segue do Teorema 1.9 que $(x - \beta_1)$ é um fator de $f(x)$ com quociente que denotamos por $q_1(x)$, isto é,

$$f(x) = (x - \beta_1)q_1(x).$$

Como β_2 sendo outra raiz de 1.5, então segue que $q_1(\beta_2) = 0$. Assim, $x - \beta_2$ é um fator de $q_1(x)$, com quociente que denotamos por $q_2(x)$. Assim,

$$f(x) = (x - \beta_1)q_1(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2)q_2(x).$$

Prosseguindo com este processo obtemos

$$f(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2)(x - \beta_3) \dots (x - \beta_n)q_n(x). \quad (1.6)$$

Mas $f(x)$ tem grau n , portanto $q_n(x)$ é constante, isto é, $q_n(x) = q$. Em particular,

$$f(\beta_{n+1}) = (\beta_{n+1} - \beta_1)(\beta_{n+1} - \beta_2)(\beta_{n+1} - \beta_3) \dots (\beta_{n+1} - \beta_n)q. \quad (1.7)$$

Como cada fator de (1.7) é não nulo segue que $f(\beta_{n+1}) \neq 0$, o que é uma contradição com o fato de β_{n+1} ser uma raiz de 1.5. Assim, qualquer equação da forma 1.5 tem, no máximo, n raízes distintas. \square

Definição 1.4. Chamamos de índice ou altura de uma equação no formato da Definição 1.4 o número

$$h = (n - 1) + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_2| + |a_1| + |a_0|. \quad (1.8)$$

Observamos que o índice é um número inteiro positivo e, além disso, o menor valor que h pode assumir é 1 que é a altura da equação $x = 0$. Por outro lado, fixada uma altura h existe um número finito de polinômios com esta altura. De fato, existe um número finito de coeficientes inteiros cuja soma dos módulos ao fixado grau menos um sejam iguais a h .

Teorema 1.11. (Cantor) *O conjunto dos números algébricos é enumerável.*

Demonstração. Podemos colecionar todas as equações de uma altura fixada como iniciado na Tabela 1.1 e, listar de todos os números algébricos soluções das equações da Tabela 1.1 em ordem crescente. Dessa maneira, temos a seguinte sequência

$$0; -1, 1; -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2; -3, -\frac{\sqrt{5}+1}{2}, -\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \dots \quad (1.9)$$

O número 0 vem da única operação de índice 1, os números -1 e 1 , das equações de índice 2, e assim por diante. Para cada índice h fixo, há um número de equações finito, porque o grau n e os coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ estão restritos a um conjunto

Tabela 1.1: Equações por Índices

Índice	Equações
1	$x = 0$
2	$x^2 = 0, 2x = 0, x + 1 = 0, x - 1 = 0$
3	$x^3 = 0, 2x^2 = 0, x^2 + 1 = 0, 3x = 0, 2x + 1 = 0, 2x - 1 = 0, x + 2 = 0, x - 2 = 0$

finitos de inteiros. Como o número de polinômios com coeficientes inteiros com uma fixada altura é finito o conjunto das as raízes de todos os polinômios com altura h é um conjunto finito. Logo, o conjunto das raízes de todos os polinômios de todas as possíveis alturas h é um conjunto enumerável, pois é união enumerável de conjuntos finitos. \square

Uma pergunta que surge neste momento é: o conjunto formado pelos números reais é enumerável? Se mostrarmos que \mathbb{R} é não enumerável, então o resultado anterior estabelece que existem número reais que são transcendentos. Observamos que a prova apresentada acima é não construtiva, uma vez que estabelece a existência de números transcendentos sem dar nenhum exemplos de tais números. No que segue, mostramos que o conjunto formado pelos números reais não é enumerável usando um argumento proposto também por Cantor.

Teorema 1.12 (Cantor). *O intervalo $(0, 1)$ não é enumerável.*

Demonstração. Observamos que $(0, 1)$ é um conjunto infinito, pois $A = \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}$ é infinito e $A \subset (0, 1)$. Suponhamos, por absurdo, que $(0, 1)$ seja enumerável, isto é, existe uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o intervalo $(0, 1)$.

Seja $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}$ uma enumeração de $(0, 1)$, onde cada x_i pode ser representado na forma decimal infinita. Vários números terão mais de uma representação terminando em infinitos algarismos 0 ou 9, neste caso escolhemos a representação que o mesmo terminam em infinitos 0. Assim, por exemplo, o número 0,4 será representado como 0,4000000... e não como 0,3999999....

Sejam $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}, \dots \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ os algarismos da representação decimal de x_i

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}a_{17} \dots \\
 x_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}a_{27} \dots \\
 x_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}a_{37} \dots \\
 &\vdots = \vdots \\
 x_n &= 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}a_{n5}a_{n6}a_{n7} \dots \\
 &\vdots = \vdots
 \end{aligned}$$

Defina o número $b = 0, b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7, \dots$ tal que para cada i temos que $b_i \neq a_{ii}$, ou seja, $b_1 \neq a_{11}, b_2 \neq a_{22}, \dots$.

Notemos que b é diferente de x_1 , pois, pelo modo como foi definido ele possui a primeira casa decimal $b_1 \neq a_{11}$. O mesmo fato se repetindo para cada x_i e assim b é distinto de todos os x_i .

Assim, temos a contradição do fato de que $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}$ fosse uma enumeração de $(0, 1)$, já que encontramos $b \in (0, 1)$ que não está nessa enumeração. \square

Corolário 1.13. O conjunto dos números reais \mathbb{R} é não enumerável.

Demonstração. Existem duas formas de mostrar esse fato. Primeiro, como o intervalo $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$. Suponhamos que \mathbb{R} seja enumerável. Então, em particular, $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ seria enumerável, o que é uma contradição. \square

Uma outra maneira de provar o corolário acima é considerar a função $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x - x^2}.$$

Então, f é uma bijeção conforme ilustrado pelo gráfico da figura 1.1 e, como $(0, 1)$ não é enumerável temos que \mathbb{R} é não enumerável.

A partir dos resultados apresentados até a presente leitura podemos enunciar os seguintes corolários do Teorema (1.12).

Corolário 1.14. O conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é não enumerável.

Demonstração. Do Teorema 1.8 sabemos que \mathbb{Q} é enumerável. Se $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ fosse enumerável, como $\mathbb{R} = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$, segue do Teorema 1.3 que \mathbb{R} seria enumerável, contrariando assim o Teorema 1.12. E, portanto, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é não enumerável. \square

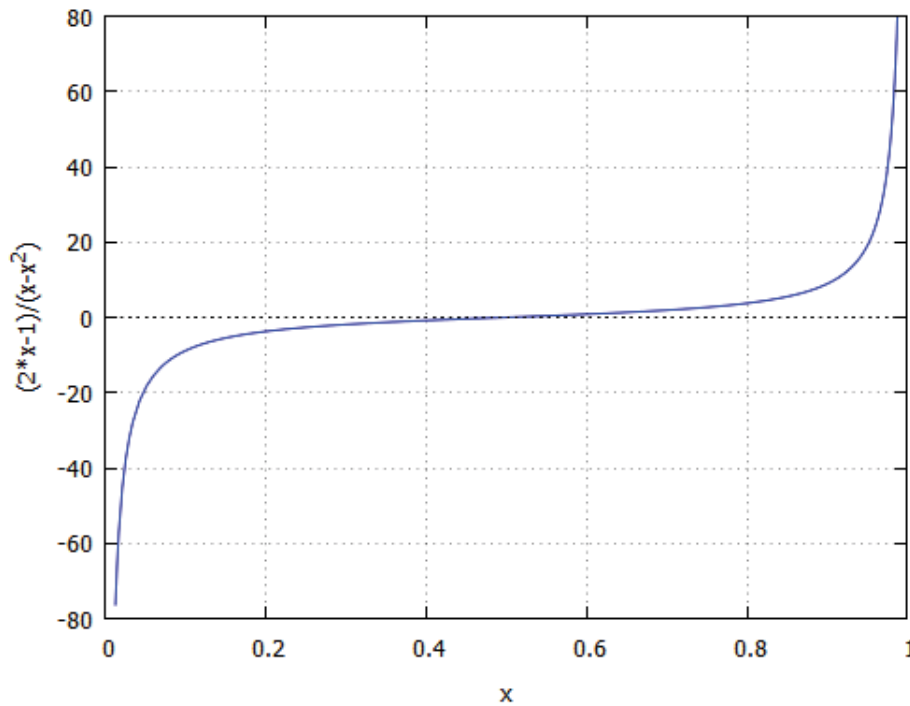


Figura 1.1: Gráfico de $f(x) = \frac{2x-1}{x-x^2}$

Corolário 1.15. Seja T o conjunto dos números reais que não são algébricos. Então, T é não enumerável.

Demonstração. Suponhamos o conjunto T dos números reais transcendentos fosse enumerável, por exemplo,

$$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, \dots\}.$$

Como já mostramos no Teorema (1.11), o conjunto dos números algébricos é enumerável, isto é, poderíamos listar os números algébricos como

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$$

Assim o conjunto dos números reais poderia ser descrito como,

$$t_1, a_1, t_2, a_2, t_3, a_3, t_4, a_4, \dots$$

contradizendo o fato de que o conjuntos dos números reais é não enumerável. □

Cantor usou a maneira descrita aqui para mostrar que existem Números Transcendentes, mesmo sem dar um exemplo de um número que não fosse algébrico (Ver [12]). Mais do que isso, ele mostrou que a cardinalidade do conjunto dos números transcendentos é maior do que a cardinalidade do conjunto dos números algébricos.

Nas palavras de Niven (2012, p.156) [[7]]: *"Os números algébricos podem ser apresentados como termos de uma sequência infinita, mas existem números transcendentais em demasia para uma tal representação sequencial"*.

Capítulo 2

Os Números de Liouville

Neste capítulo, estudamos resultados sobre a aproximação de números racionais por números irracionais e propriedades dos números irracionais algébricos relativas a essas aproximações. E como a partir da análise dessas aproximações e de suas limitações foi realizada uma sábia escolha para mostrar a existência de números transcendentos. Aqui teremos a apresentação dos primeiros números transcendentos descobertos na história da matemática: os números de Liouville, nomeados assim em homenagem a Liouville¹. Recomendamos a leitura de [[5]], [[6]] e [[7]], que foram as referências utilizadas para esse capítulo.

2.1 Aproximações de Números Irracionais

Nesta seção, estamos interessados em entender o erro cometido ao aproximarmos um número real tomando o número inteiro mais próximo. Iniciamos com um resultado básico que nos será útil para os próximos teoremas.

Teorema 2.1. *Sejam λ um número irracional qualquer e r um número racional diferente de zero. Então, a adição, subtração, multiplicação e divisão de r e λ resultarão em números irracionais. Além disso, $-\lambda$ e λ^{-1} são irracionais.*

Demonstração. Se $-\lambda$ fosse racional, digamos, $-\lambda = r_1$ com r_1 um número racional. Teríamos, $\lambda = -r_1 = (-1)r_1$, o que implica λ racional o que é uma contradição.

Como a irracionalidade de λ^{-1} é um caso particular da irracionalidade de $\frac{r}{\lambda}$, para $r = 1$, vamos provar apenas o caso geral. Faremos isso juntamente com as outras afirmações do teorema referente a irracionalidade, provaremos simultaneamente que $\lambda + r$, $\lambda - r$, $r - \lambda$, $r\lambda$, $\frac{\lambda}{r}$ e $\frac{r}{\lambda}$ são números irracionais.

¹Joseph Liouville (1809-1882) foi um matemático francês, fundador do *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. Sendo também conhecido pela demonstração da existência de números transcendentos e pela divulgação dos trabalhos de Galois.

Cada expressão dessa que fosse um número racional, nos dariam uma das seguintes equações:

$$\lambda + r = r_2, \lambda - r = r_3, r - \lambda = r_4, r\lambda = r_5, \frac{\lambda}{r} = r_6 \text{ e } \frac{r}{\lambda} = r_7,$$

com r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 e r_7 números racionais. Resolvendo essas equações em λ , teríamos

$$\lambda = r_2 - r, \lambda = r_3 + r, \lambda = r - r_4, \lambda = \frac{r_5}{r}, \lambda = rr_6, \lambda = \frac{r}{r_7}.$$

Devido as propriedades de fechamento dos números racionais quanto a essas operações, todos os segundos membros dessas equações são números racionais. Porém, nenhuma delas é verdadeira, pois λ é irracional. E, portanto, o teorema está demonstrado. \square

Teorema 2.2. *Para qualquer número irracional λ , existe um único número inteiro m tal que*

$$-\frac{1}{2} < \lambda - m < \frac{1}{2}.$$

Demonstração. Escolhemos m como o inteiro mais próximo de λ . Logo, m será igual ao inteiro imediatamente menor do que λ ou ao inteiro imediatamente maior do que λ . Não havendo a possibilidade de ambos deles estarem a mesma distância de λ , pois nesse caso λ estaria no meio de dois inteiros consecutivos e assim λ seria dado pela média entre esses dois inteiros e portanto racional, o que contraria a nossa hipótese. Agora percebendo que qualquer intervalo real $[a, b]$ de comprimento unitário, ou seja, $|b - a| = 1$, conterá um único número inteiro. Vamos agora escolher $a = \lambda - \frac{1}{2}$ e $b = \lambda + \frac{1}{2}$. Os números a e b não são inteiros, nem sequer são racionais, pois λ é irracional, conforme o Teorema 2.1. Denotamos por m o único inteiro tal que $m \in [a, b]$. Nesse caso, ainda, temos que $m \in (a, b)$, logo

$$\lambda - \frac{1}{2} < m < \lambda + \frac{1}{2}.$$

E, subtraindo λ ,

$$-\frac{1}{2} < m - \lambda < \frac{1}{2}.$$

Multiplicando por (-1) e reorganizando,

$$-\frac{1}{2} < \lambda - m < \frac{1}{2}.$$

Como queríamos.

Para provar a unicidade de m , suponhamos que existisse outro inteiro n tal que

$$-\frac{1}{2} < \lambda - n < \frac{1}{2},$$

Então, também seria válido para n , a seguinte desigualdade,

$$-\frac{1}{2} < n - \lambda < \frac{1}{2},$$

Somando λ a última desigualdade obtemos,

$$\lambda - \frac{1}{2} < n < \lambda + \frac{1}{2}.$$

Porém, o intervalo $[a, b]$ contém apenas um inteiro e, portanto, $n = m$. □

No resultado anterior, consideramos a aproximação de um número irracional usando números inteiros. Uma outra forma de realizar este procedimento é utilizar a representação decimal. Por exemplo,

$$\sqrt{5} = 2,236067977\dots$$

Os números $2; \ 2,2; \ 2,23; \ 2,236; \dots$, formam uma sequência de aproximações cada vez melhores, ou seja, com um erro menor entre a aproximação e o valor exato de $\sqrt{5}$.

$$2, \frac{22}{10}, \frac{223}{100}, \frac{2236}{1000}, \dots$$

Além disso, são válidas as desigualdades,

$$\begin{aligned} 2 &< \sqrt{5} < 3, \\ \frac{22}{10} &< \sqrt{5} < \frac{23}{10}, \\ \frac{223}{100} &< \sqrt{5} < \frac{224}{100}, \\ \frac{2236}{1000} &< \sqrt{5} < \frac{2237}{1000}, \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Todas essas desigualdades trazem infinitos termos tão próximos de $\sqrt{5}$ com erro tão pequeno quanto se deseje especificar. Por exemplo, para um erro menor do que 0,01 basta escolher $2,23$ ou $2,236$.

Note que todas as aproximações que apresentamos anteriormente têm a característica de que os seus denominadores são todos potências de 10. É possível obter melhores aproximações melhores sem qualquer restrição aos denominadores.

Por exemplo, para o número irracional π , temos o valor 3,14159265..., e são aproximações de π ,

$$3, \frac{31}{10}, \frac{314}{100}, \frac{3141}{1000}, \frac{31415}{10000}, \dots \quad (2.1)$$

Mas $\frac{22}{7}$ tem valor aproximado de 3,142857..., estando mais próximo de π do que $\frac{31}{10}$ com valor de 3,1 e até mesmo de $\frac{314}{100}$ com valor de 3,14. Claro que não está mais próximo do que os demais termos listados em (2.1).

O próximo teorema estabelece uma outra forma para obter aproximações de número irracional qualquer por um número racional da forma $\frac{m}{n}$ cometendo um erro menor do que $\frac{1}{2n}$.

Teorema 2.3. *Sejam λ um número irracional e n um número inteiro positivo qualquer. Então, existe um número racional $\frac{m}{n}$ tal que*

$$-\frac{1}{2n} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n}.$$

Demonstração. Definimos m como sendo o número inteiro mais próximo de $n\lambda$ que é irracional (Teorema 2.1). Segue do Teorema 2.2,

$$-\frac{1}{2} < n\lambda - m < \frac{1}{2}.$$

Dividindo por n , obtemos

$$-\frac{1}{2n} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n}.$$

□

Será que é possível conseguir aproximações cometendo erro menor do que $\frac{1}{3n}, \frac{1}{4n}, \dots$? De fato, é possível mostrar que podemos obter aproximações de λ irracional com erro menor do que $\frac{1}{kn}$ para todo inteiro k (Ver [7]).

Em geral, podemos mostrar que para todo número irracional λ , existem infinitos números racionais $\frac{m}{n}$, em forma irredutível, tais que

$$-\frac{1}{n(k+1)} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n(k+1)},$$

onde k é um número inteiro qualquer (veja [7]).

Diante dos resultados que apresentamos até o momento é natural pensar se existem

outras maneiras de encontrar aproximações de um número irracional qualquer λ por números racionais da forma $\frac{m}{n}$ de modo a cometer erros menores que os seguintes $\frac{1}{n^3}$, $\frac{1}{n^4}$, $\frac{1}{n^5}$, \dots . E a resposta é que em geral não. De fato, para discutir melhor este fato, precisamos da definição de grau de número algébrico.

Definição 2.1. O grau de um número algébrico λ é definido pelo polinômio $p(x)$ de menor grau possível tal que $p(\lambda) = 0$.

Assim, se λ é um número algébrico de grau n e $q(x)$ é um polinômio qualquer de grau m , com m estritamente menor do que n , então $q(\lambda) \neq 0$.

Existe uma relação que associa o grau de número algébrico com os tipos de aproximações que podemos utilizar. Por exemplo, se λ é um número irracional algébrico de grau 3 é possível aproximá-lo por números racionais da forma $\frac{m}{n}$ com erro menor do que $\frac{1}{n^3}$, porém não é possível fazer o erro ficar menor do que $\frac{1}{n^4}$, $\frac{1}{n^5}$ etc. De maneira geral, para um número irracional algébrico λ de grau r , podemos tomar aproximações por números racionais $\frac{m}{n}$ com erro menor do que $\frac{1}{n^r}$, porém não é possível tomar tais aproximações com erro menores do que $\frac{1}{n^{r+k}}$, onde k é um inteiro positivo qualquer (ver [7]).

2.2 Os Primeiros Exemplos de Números Transcendentes

Nesta seção, apresentamos uma prova construtiva da existência de números transcendentos. Definimos a constante de Liouville α , e mostramos que ela é um número transcendente. Para justificar a transcendência de α , vamos aproximar esta constante de uma infinidade de números racionais $\frac{m}{n}$ com erro menor do que $\frac{1}{n^j}$, onde j é um inteiro qualquer.

Consideramos a constante

$$\alpha = 0,11000100000\dots,$$

cujas casas decimais são compostas por zeros e uns. Observamos que os algarismos 1 aparecem nas casas decimais: 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, \dots , ou seja, nas casas decimais

$$1!, 2!, 3!, 4!, 5!, 6!, 7!, \dots,$$

onde k é um número natural e $k! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (k-2) \times (k-1) \times k$. Todos os algarismos com exceção daqueles nas casas decimais correspondentes aos fatoriais são iguais à zero.

Uma outra forma de representar a constante α é escrevê-la como uma soma de potências negativas de 10:

$$\begin{aligned}\alpha &= 10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + 10^{-4!} + 10^{-5!} + \dots \\ &= 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-6} + 10^{-24} + 10^{-120} + \dots \\ &= 0,1 + 0,01 + 0,000001 + \dots\end{aligned}$$

O número α definido acima é chamado constante de Liouville, em homenagem ao matemático francês de mesmo nome.

Vamos agora obter uma aproximação β de α que nos irá auxiliar na demonstração da transcendência de α . Tal aproximação pode ser obtida tomando β como a soma dos primeiros j termos de α , isto é,

$$\beta = 10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + \dots + 10^{-j!}.$$

Notamos que β é um número racional, pois é soma de frações cujos denominadores são potências de 10. Podemos reescrever a última expressão da seguinte maneira

$$\beta = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \dots + \frac{1}{10^{(j-1)!}} = \frac{t}{10^j} \quad (2.2)$$

onde o numerador t é algum número inteiro positivo. Além disso, o número racional β está próximo de α e

$$\alpha - \beta = 10^{-(j+1)!} + 10^{-(j+2)!} + 10^{-(j+3)!} + \dots$$

A representação decimal de $\alpha - \beta$ é também inteiramente formada de zeros e uns e o algarismo 1 aparece pela primeira vez na posição $(j+1)!$ em seguida na posição $(j+2)!$ e, assim, sucessivamente. Portanto,

$$\alpha - \beta < 0,000000\dots0000002,$$

onde todos os algarismos zeros, exceto o algarismo 2 na posição $(j+1)!$. Daí,

$$\alpha - \beta < \frac{2}{10^{(j+1)!}}.$$

Como α e β são positivos, todas as potências de α e β também serão positivas. Temos ainda que $\alpha < 1$ e $\beta < 1$, seguindo que $\alpha^r < 1$ e $\beta^s < 1$, assim $\alpha^r \beta^s < 1$, para r e s quaisquer inteiros positivos. Obtemos então, as seguintes desigualdades,

$$0 < \alpha^r < 1, \quad , 0 < \beta^s < 1, \quad , 0 < \alpha^r \beta^s < 1.$$

Vamos agora mostrar que a constante de Liouville α é um número transcendente. Iniciamos supondo por absurdo, que α é um número algébrico. Assim, dentre todas os possíveis polinômios com coeficientes inteiros que α é uma raiz, escolhemos um de menor grau possível

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x^1 + c_0 = 0. \quad (2.3)$$

Teorema 2.4. *O número β obtido como uma aproximação de α na equação (2.2) não é uma raiz da equação*

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x^1 + c_0 = 0,$$

isto é, $f(\beta) \neq 0$.

Demonstração. Se β fosse uma raiz de $f(x) = 0$ teríamos pelo Teorema 1.9 que $(x - \beta)$ seria um fator de $f(x)$, isto é,

$$f(x) = (x - \beta)q(x),$$

onde $q(x)$ é um polinômio com coeficientes racionais e de grau uma unidade menor do que o grau de $f(x)$. Sendo α uma raiz de $f(x) = 0$, teríamos

$$f(\alpha) = (\alpha - \beta)q(\alpha) = 0.$$

Como o fator $(\alpha - \beta) \neq 0$, então $q(\alpha) = 0$. Assim, α seria uma raiz de $q(x)$. Se k é o produto de todos os denominadores dos coeficientes racionais de $q(x)$ o produto $kq(x)$ terá coeficientes inteiros e α será uma raiz de $kq(x) = 0$. Absurdo, pois contraria a hipótese de α não satisfazer nenhuma equação com coeficientes inteiros de grau menor do que n . □

Os próximos resultados analisam a ordem de grandeza do número $f(\alpha) - f(\beta)$ que é um polinômio em β com coeficientes inteiros, uma vez que, $f(\alpha) = 0$.

Teorema 2.5. *Existe um número N que depende apenas dos coeficientes de $f(x)$ e do seu grau, tal que*

$$|f(\alpha) - f(\beta)| < N(\alpha - \beta).$$

Demonstração. Definimos o número N por

$$N = n|c_n| + (n-1)|c_{n-1}| + (n-2)|c_{n-2}| + \cdots + 2|c_2| + |c_1|.$$

Notamos que N independe do inteiro j usado na definição de β . Logo,

$$f(\alpha) - f(\beta) = c_n(\alpha^n - \beta^n) + c_{n-1}(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + \cdots + c_1(\alpha - \beta).$$

Usando a identidade

$$\alpha^k - \beta^k = (\alpha - \beta)(\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}\beta + \alpha^{k-3}\beta^2 + \cdots + \alpha^2\beta^{k-3} + \alpha\beta^{k-2} + \beta^{k-1}),$$

obtemos

$$\alpha^k - \beta^k < (\alpha - \beta)(1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + 1 + 1) = k(\alpha - \beta),$$

pois os termos $\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2}\beta, \dots$ são menores do que 1 e $\alpha - \beta$ é um número positivo. Assim,

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) = & (\alpha - \beta)[c_n(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}) + \\ & c_{n-1}(\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-3} + \beta^{n-2}) + \cdots + c_1]. \end{aligned}$$

Tomando os valores absolutos e usando a expansão de $\alpha^k - \beta^k$, obtemos

$$|f(\alpha) - f(\beta)| < |\alpha - \beta| [n|c_n| + (n-1)|c_{n-1}| + \cdots + |c_1|].$$

Como $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta$, usando a definição de N do começo da demonstração temos,

$$|f(\alpha) - f(\beta)| < N(\alpha - \beta).$$

□

Teorema 2.6. *O número*

$$|f(\alpha) - f(\beta)| \times 10^{n \times j!}$$

é um número inteiro positivo para qualquer que seja o valor atribuído ao inteiro positivo j .

Demonstração. Temos que $f(\alpha) = 0$, então

$$|f(\alpha) - f(\beta)| = |-f(\beta)| = |f(\beta)| = \times 10^{n \times j!}$$

Sabendo que $\beta = \frac{t}{10^{j!}}$ e fazendo $x = \beta$ na Equação (2.3) obtemos,

$$\begin{aligned} f(\beta) &= c_n \beta^n + c_{n-1} \beta^{n-1} + c_{n-2} \beta^{n-2} + \cdots + c_1 \beta + c_0 \\ &= \frac{c_n t^n}{10^{n \times j!}} + \frac{c_{n-1} t^{n-1}}{10^{(n-1) \times j!}} + \frac{c_{n-2} t^{n-2}}{10^{(n-2) \times j!}} + \cdots + \frac{c_1 t}{10^{j!}} + c_0. \end{aligned}$$

Multiplicando por $10^{n \times j!}$, temos

$$f(\beta) \times 10^{n \times j!} = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} 10^{j!} + c_{n-2} t^{n-2} 10^{2j!} + \cdots + c_1 t 10^{(n-1)j!} + c_0 10^{n \times j!},$$

onde o segundo membro é um número inteiro diferente de zero porque $f(\beta) \neq 0$. Tomando os valores absolutos vemos que

$$|f(\beta) \times 10^{n \times j!}| = |f(\beta)| \times 10^{n \times j!}$$

é um inteiro positivo, conforme queríamos. □

Vejamos agora que o número $|f(\alpha) - f(\beta)| \times 10^{n \times j!}$ está entre 0 e 1, contradizendo o fato do mesmo ser um número inteiro. Para isso, precisamos escolher o inteiro j que foi usado na definição de β de modo que

$$\frac{2N \times 10^{n \times j!}}{10^{(j+1)!}} < 1.$$

Observamos que a última desigualdade é equivalente a

$$\frac{2N}{10^{(j+1)! - n \times j!}} < 1,$$

e, o expoente no denominador pode ser escrito como

$$(j+1)! - n \times j! = (j+1)j! - n \times j! = (j+1-n)j!.$$

Dado um n fixo, o expoente pode se tornar tão grande quanto desejarmos, basta tomarmos j muito grande. Os valores n e N são fixados; mas como j é independente de n e N , podemos tomar j tal que $\frac{2N \times 10^{n \times j!}}{10^{(j+1)!}} < 1$. Assim, utilizando essa desigualdade e o Teoremas 2.4 vemos que o número mostrado no Teorema 2.5 é positivo e,

$$|f(\alpha) - f(\beta)| \times 10^{n \times j!} < N(\alpha - \beta) \times 10^{n \times j!} < \frac{2N \times 10^{n \times j!}}{10^{(j+1)!}} < 1.$$

Obtemos assim uma contradição, pois temos um valor inteiro maior que 1 e que também está entre 0 e 1.

Podemos concluir a demonstração usando as duas formas distintas para o número $f(\alpha) - f(\beta) = -f(\beta)$ apresentadas nos dois últimos teoremas. Inicialmente mostramos que este número é um inteiro maior do que 1, por outro lado, percebemos que $f(\alpha) - f(\beta)$ é uma diferença entre dois polinômios e que essa diferença é da mesma ordem de grandeza que a da diferença $\alpha - \beta$ que é relativamente pequena. Devido às ordens de grandezas conflitantes para $f(\alpha) - f(\beta)$, obtemos uma contradição. Finalmente, concluímos que α é um número transcendente.

Observamos que este não é um caminho óbvio mostrar a transcendência de um número α . Possivelmente esta seja uma das razões que levaram tais resultados a demorar de aparecer na história da matemática.

Definição 2.2. Um número real x , é chamado número de Liouville se, para todo inteiro positivo n , existirem inteiros p e q , tais que

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n},$$

com $q > 1$. Ou, alternativamente, um número real x é chamado número de Liouville se existir uma sucessão $\frac{p_j}{q_j}$, $q_j > 0$, $\text{mdc}(p_j, q_j) = 1$, com todos os elementos diferentes, e tal que

$$\left| x - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^n}.$$

A constante de Liouville α é um exemplo de número de Liouville.

Agora trazemos alguns resultados de forma fiel à trazida por Djairo Figueiredo em [[5]].

Teorema 2.7. *Seja a um número algébrico real de grau n . Então, existe uma constante $A > 0$ tal que*

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{Aq^n} \quad (2.4)$$

para todo racional $\frac{p}{q}$. (Se $n = 1$, tome $\frac{p}{q} \neq a$)

Demonstração. a é uma solução de uma equação polinomial da forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0. \quad (2.5)$$

Seja $d > 0$ tal que, no intervalo $d \in [a - d, a + d]$ a única raiz de $f(x) = 0$ é a . Tal d existe e deve ser menor que a menor das distâncias de a às demais raízes reais da equação polinomial. A seguir observando que a derivada $f'(x)$ de $f(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$ e, portanto, ela é limitada em qualquer intervalo finito: seja pois $M > 0$ tal que

$$|f'(x)| < M, \text{ para } x \in [a - d, a + d]. \quad (2.6)$$

Então, para qualquer racional $\frac{p}{q}$, com $q > 0$, em $[a - d, a + d]$, e aplicando o valor médio temos que,

$$f(a) - f\left(\frac{p}{q}\right) = \left(a - \frac{p}{q}\right)f'(b), \quad (2.7)$$

onde $b \in (a - d, a + d)$. Como $f(a) = 0$, obtemos

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|a - \frac{p}{q}\right| |f'(b)| \leq M \left|a - \frac{p}{q}\right|, \quad (2.8)$$

onde buscamos a estimativa (2.6) no último passo. Para obter a desigualdade buscada, necessitamos de uma estimativa inferior para $f\left(\frac{p}{q}\right)$:

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|\frac{a_n p^n + a_{n-1} q p^{n-1} + \cdots + a_0 q^n}{q^n}\right| \geq \frac{1}{q^n}. \quad (2.9)$$

Portanto, (2.8) e (2.9) nos dar a desigualdade

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{M q^n},$$

para $\frac{p}{q} \in [a - d, a + d]$. Se $\frac{p}{q}$ não estiver nesse intervalo teremos então

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| > d$$

e como $q \geq 1$ temos

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| > \frac{d}{q^n}.$$

Tomamos, finalmente, $\frac{1}{A}$ igual ao menor dos números $\frac{1}{M}$ e d , e obtemos a relação (2.4) pra todos os racionais $\frac{p}{q}$. \square

Teorema 2.8. *Todo número de Liouville é transcendente.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que um certo número de Liouville a seja algébrico, digamos, de grau n . Então, pelo Teorema 2.8, seguiria que a relação (2.4) seria válida para todo racional. E particular para os $\frac{p_j}{q_j}$ da Definição 2.2. Assim, teríamos

$$\frac{1}{A q_j^n} < \left|a - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j},$$

de onde obtemos

$$q_j^{j-n} < A.$$

Como $q_j \rightarrow +\infty$, segue-se que (2.2) não pode se verificar para j suficientemente grande. O absurdo provém de supormos que a seja algébrico. \square

Capítulo 3

Outros Números Transcendentes

Todo número de Liouville é transcendente, mas nem todo número transcendente é de Liouville. Neste capítulo, apresentamos o famoso número transcendente π e apresentamos a prova de sua transcendência, recomendamos a enriquecedora leitura de Diego Marques [[6]] e João Oliveira [[9]] ao qual seguimos fielmente.

3.1 O número π é transcendente

Precisamos inicialmente de alguns resultados.

Um polinômio é dito simétrico quando podemos permutar suas variáveis sem que isso altere sua expressão, por exemplo: $x+y$, xy , x^2+xy+y^2 , são polinômios simétricos. Para polinômios simétricos vale o seguinte teorema.

Teorema 3.1. *Seja $f(t_1, \dots, t_n)$ um polinômio simétrico de grau d com coeficientes inteiros. Então, existe um polinômio $g(s_1, \dots, s_n)$ de grau menor ou igual a d com coeficientes em inteiros, onde*

$$\begin{aligned} s_1 &= \sum_{j=1}^n t_j \\ s_2 &= \sum_{i < j}^n t_i t_j \\ s_3 &= \sum_{i < j < k}^n t_i t_j t_k \\ &\vdots \\ s_n &= t_1 t_2 \dots t_n. \end{aligned}$$

são os polinômios simétricos elementares em t_1, t_2, \dots, t_n , tal que

$$f(t_1, \dots, t_n) = g(s_1, \dots, s_n). \quad (3.1)$$

Para $(n = 1)$: $s_1 = t_1$ é um polinômio simétrico elementar. Para $(n = 2)$: $s_1 = t_1 + t_2$ e $s_2 = t_1 t_2$ são polinômios simétricos elementares. Para $(n = 3)$: $s_1 = t_1 + t_2 + t_3$, $s_2 = t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3$, $s_3 = t_1 t_2 t_3$. E assim por diante.

Demonstração. Para $n = 1$, o teorema é óbvio, pois nesse caso $s_1 = t_1 + 1$. Suponhamos, agora, que o teorema seja válido para polinômios em t_1, \dots, t_{n-1} . Representemos por $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{n-1}$ os polinômios simétricos elementares em t_1, \dots, t_{n-1} :

$$\begin{aligned} \bar{s}_1 &= \sum_{j=1}^{n-1} t_j \\ \bar{s}_2 &= \sum_{i < j}^{n-1} t_i t_j \\ \bar{s}_3 &= \sum_{i < j < k}^{n-1} t_i t_j t_k \\ &\vdots \\ \bar{s}_n &= t_1 t_2 \dots t_{n-1}. \end{aligned}$$

os quais podem ser obtidos das funções correspondentes, fazendo $t_n = 0$.

Agora para provar que o teorema vale para polinômios em t_1, \dots, t_n , procedemos por indução nos graus d desses polinômios. Para $d = 0$, o resultado é trivial, pois teríamos apenas os polinômios constantes. Suponha que o resultado seja válido para polinômios de grau menor que d , e provemos que ele se verifica para polinômios de grau d . Seja, $f(t_1, \dots, t_n)$ um polinômio de grau d . Pela hipótese de indução, existe um polinômio de grau menor ou igual a d , $g_1(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{n-1})$, tal que

$$f(t_1, \dots, t_{n-1}, 0) = g_1(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{n-1}). \quad (3.2)$$

Assim, $g_1(s_1, \dots, s_n)$ é um polinômio em t_1, \dots, t_n , cujo grau é menor ou igual a d . Vemos que $g_1(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{n-1})$ é um polinômio simétrico em t_1, \dots, t_n . Logo,

$$f_1(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n) - g_1(s_1, \dots, s_{n-1}) \quad (3.3)$$

é um polinômio simétrico em t_1, \dots, t_n . Provemos agora que $f_1(t_1, \dots, t_n)$ é da forma (3.4), com f_2 de grau menor que d , para então usarmos a hipótese de indução. Agora,

se fizermos $t_n = 0$ em (3.3), obtemos, em virtude de (3.2), que

$$f_1(t_1, \dots, t_{n-1}, 0) = 0.$$

Consequentemente, t_n é um fator comum em $f_1(t_1, \dots, t_n)$. Agora, do fato que $f_1(t_1, \dots, t_n)$ é simétrico em t_1, \dots, t_n , segue-se que t_j , para todo $j = 1, \dots, n$ é fator comum de $f_1(t_1, \dots, t_n)$. Logo

$$f_1(t_1, \dots, t_n) = s_n f_2(t_1, \dots, t_n), \quad (3.4)$$

e daí segue que o grau de f_2 é $\leq d - n < d$. Aplicando a hipótese de indução, temos que existe um polinômio $g_2(s_1, \dots, s_n)$ de grau menor ou igual a $d - n$, tal que

$$f_2(t_1, \dots, t_n) = g_2(s_1, \dots, s_n). \quad (3.5)$$

Finalmente de (3.3), (3.4) e (3.5) obtemos

$$f(t_1, \dots, t_n) = s_n g_2(s_1, \dots, s_n) + g_1(s_1, \dots, s_{n-1}),$$

o que mostra que $f(t_1, \dots, t_n)$ é igual a um polinômio simétrico em s_1, \dots, s_n : $g(s_1, \dots, s_n) = s_n g_2(s_1, \dots, s_n) + g_1(s_1, \dots, s_{n-1})$. O grau de $g(s_1, \dots, s_n)$ é menor ou igual a d . Concluindo a prova. \square

Um resultado de Análise Complexa que será essencial para a demonstração é o Teorema a seguir.

Teorema 3.2. *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica e sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Então*

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq 2|z_2 - z_1| \sup |f'(z_1 + \lambda(z_2 - z_1))|. \quad (3.6)$$

onde $|z|$ representa o módulo do complexo $z = x + yi$, isto é, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Demonstração. Primeiramente, demonstraremos que

$$|f(z_0) - f(0)| \leq 2|z_0| \sup |f'(\lambda z_0)| : 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (3.7)$$

Daí, (3.6) segue-se da aplicação de (3.7) à função $g(z) = f(z + z_1)$ e ao ponto $z_0 = z_2 - z_1$. Sejam u e v as partes real e imaginária de $f(z)$. Dado $z_0 = x_0 + iy_0$, defina as funções $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pelas expressões

$$\phi(\lambda) = u(\lambda x_0, \lambda y_0).$$

$$\psi(\lambda) = v(\lambda x_0, \lambda y_0).$$

Aplicando o teorema do valor médio às funções reais ϕ e ψ obtemos

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\lambda_1), 0 < \lambda_1 < 1, \quad (3.8)$$

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\lambda_2), 0 < \lambda_2 < 1. \quad (3.9)$$

Para calcular as derivadas de ϕ e ψ , usamos o teorema de derivação das funções compostas e obtemos de (3.8) e (3.9)

$$u(x_0, y_0) - u(0, 0) = u_x(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)x_0 + u_y(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)y_0,$$

$$v(x_0, y_0) - v(0, 0) = v_x(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)x_0 + v_y(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)y_0,$$

e daí

$$f(z_0) - f(0) = u_x(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)x_0 + u_y(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)y_0 + i\{v_x(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)x_0 + v_y(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)y_0\}. \quad (3.10)$$

Agora usaremos a desigualdade

$$|z| \leq |x| + |y|,$$

da qual segue que o módulo de um número complexo $z = x + iy$ é menor ou igual que a soma dos valores absolutos de sua parte real e imaginária, bem como a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2},$$

onde a_1, a_2, b_1, b_2 são números reais quaisquer. Utilizando essas duas desigualdades em (3.10) obtemos

$$\begin{aligned} |f(z_0) - f(0)| &\leq \sqrt{u_x^2(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0) + u_y^2(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)} \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \\ &\quad + \sqrt{v_x^2(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0) + v_y^2(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)} \sqrt{x_0^2 + y_0^2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Os radicais em (3.11), envolvendo u e v são precisamente o módulo de f' calculado em certos pontos, isto é,

$$|f(z_0) - f(0)| \leq |f'(\lambda_1 z_0)||z_0| + |f'(\lambda_2 z_0)||z_0|,$$

de onde segue (3.10) imediatamente. E assim, demonstramos o Teorema (3.2). \square

3. Outros Números Transcendentes

Agora vamos demonstrar a transcendência de π . Para mostrar que π é transcendente começamos supondo por absurdo que π seja um número algébrico.

Assim, tomando $i = \sqrt{-1}$, teríamos que $i\pi$ seria também um número algébrico. Daí, $i\pi$ seria raiz de uma equação polinomial com coeficientes inteiros:

$$P_1(x) = 0. \quad (3.12)$$

Representando as raízes da Equação (3.12) por $\alpha_1 = i\pi, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. E sabendo que $e^{i\pi} = -1$, obtemos

$$\prod_{j=1}^n (1 + e^{\alpha_j}) = 0. \quad (3.13)$$

Ao desenvolver o produto da Equação (3.13), teremos uma expressão da forma: 1 + somatório de exponenciais cujos expoentes são:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \quad (3.14)$$

$$\alpha_i + \alpha_j, \text{ para todo } i < j \quad (3.15)$$

$$\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k, \text{ para todo } i < j < k \quad (3.16)$$

$$\vdots \quad (3.17)$$

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n. \quad (3.18)$$

Notemos que o número de termos em (3.14) é n , em (3.15) é $\binom{n}{2}$, em (3.16) é $\binom{n}{3}$, em (3.18) é $\binom{n}{n} = 1$, onde $\binom{n}{m}$ são os coeficientes binomiais, isto é, $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ para $0 \leq m \leq n$.

Como $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ satisfazem uma equação polinomial de grau n com coeficientes inteiros, segue de (3.1) que: os inteiros em (3.15) satisfazem uma equação polinomial de grau $\binom{n}{2}$ com coeficientes inteiros

$$P_2(x) = 0; \quad (3.19)$$

os números em (3.16) satisfazem uma equação de grau $\binom{n}{3}$ com coeficientes inteiros

$$P_3(x) = 0, \quad (3.20)$$

e assim sucessivamente.

Logo os números em (3.14) ... (3.18) satisfazem a equação polinomial

$$P_1(x) \dots P_n(x) = 0 \quad (3.21)$$

com coeficientes inteiros e cujo grau é $n + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$. Como alguns dos números em (3.14) ... (3.18) podem se anular, podemos supor que m deles sejam diferentes de zero e representando-os por β_1, \dots, β_m . Logo, simplificando de (3.21) os fatores da forma x^q , para $q > 0$, caso haja, (e haverá se $2^n - 1 > m$), obtemos que β_1, \dots, β_m são raízes de uma equação na forma

$$R(x) = cx^m + c_{m-1}x^{m-1} + \dots + c_1x + c_0 = 0, \quad (3.22)$$

com coeficientes inteiros.

A seguir, efetuamos o produto de (3.13) e obtemos

$$k + e^{\beta_1} + \dots + e^{\beta_m} = 0. \quad (3.23)$$

Considere agora o polinômio

$$P(x) = \frac{c^s}{(p-1)!} x^{p-1} (R(x))^p, \quad (3.24)$$

onde $s = mp - 1$ e p é um número primo a ser escolhido posteriormente. O grau de P é $r = s + p$. Seja agora

$$F(x) = P(x) + P'(x) + \dots + P^{(s+p)}(x). \quad (3.25)$$

Segue que

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) = -e^{-x}P(x). \quad (3.26)$$

Aplicando o Teorema (3.2) à função $f(z) = e^{-z}F(z)$, temos

$$|e^{-\beta_j}F(\beta_j) - F(0)| \leq 2|\beta_j| \sup|e^{-\lambda\beta_j}P(\lambda\beta_j)| : 0 \leq \lambda \leq 1, \quad (3.27)$$

para $j = 1, \dots, m$. Fazendo

$$\varepsilon_j = 2|\beta_j| \sup|e^{(1-\lambda)\beta_j}P(\lambda\beta_j)| : 0 \leq \lambda \leq 1, \quad (3.28)$$

obtemos de (3.27) que

$$|F(\beta_j) - e^{\beta_j}F(0)| \leq \varepsilon_j. \quad (3.29)$$

Usando (3.23) e a expressão (3.29) para $j = 1, \dots, m$ obtemos

$$|kF(0) + \sum_{j=1}^m F(\beta_j)| \leq \sum_{j=1}^m \varepsilon_j. \quad (3.30)$$

Mostraremos, agora, que o lado esquerdo de (3.30) é um inteiro não nulo, e que o lado direito, para p conveniente, é menor que 1.

Devemos, então, calcular as várias derivadas de $P(x)$ nos pontos $0, \beta_1, \dots, \beta_m$. O polinômio $P(x)$ definido em (3.24) é da forma

$$P(x) = \frac{c^s}{(p-1)!} c_0^p x^{p-1} + bx^p + \dots \quad (3.31)$$

Logo,

$$P^{(i)}(0) = 0, \text{ para } i < p-1, \text{ e } P^{(p-1)}(0) = c^s c_0^p. \quad (3.32)$$

Por outro lado, segue-se diretamente de (3.24) que

$$P^{(i)}(\beta_j) = 0, \text{ para } i < p, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.33)$$

uma vez que nas derivadas $P^{(i)}(x)$, para i, p , a expressão $R(x)$ é fator comum, e $R(\beta_j) = 0$.

Para as derivadas de ordem $i \geq p$, e de (3.24), concluímos que os coeficientes de

$$P^{(i)}(x), i \geq p, \quad (3.34)$$

são inteiros divisíveis por pc^s .

Logo, de (3.32) e (3.34) obtemos

$$F(0) = c^s c_0^p + pc^s k_0, \quad (3.35)$$

onde k_0 é um inteiro, cujo valor não importa para os nossos propósitos. Para os demais $F(\beta_j)$, observamos que

$$\sum_{j=1}^m F(\beta_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i \geq p} P^{(i)}(\beta_j) = \sum_{i \geq p} \sum_{j=1}^m P^{(i)}(\beta_j). \quad (3.36)$$

Agora, na expressão

$$\sum_{j=1}^m P^{(i)}(\beta_j) \quad (3.37)$$

para cada i fixado, com $p \leq i \leq s+p$. Por (3.34) o polinômio $P^{(i)}$ tem coeficientes

inteiros divisíveis por pc^s . Além disso, como P tem grau $s + p$, segue-se que $P^{(i)}$ tem grau $s + p - i \leq sm$ pois $p \leq i$. Logo, a expressão (3.37) pode ser escrita como

$$\sum_{j=1}^m P^{(i)}(\beta_j) = pc^s Q(\beta_1, \dots, \beta_m), \quad (3.38)$$

onde $Q(\beta_1, \dots, \beta_m)$ é um polinômio nos β'_i 's de grau menor ou igual a s , com coeficientes inteiros. Veja ainda que $Q(\beta_1, \dots, \beta_m)$ é um polinômio simétrico nos β'_i 's com coeficientes inteiros. Logo, pelo Teorema (3.1), existe um polinômio $G(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ de grau menor ou igual a s com coeficientes inteiros e onde $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ são os polinômios simétricos elementares em β_1, \dots, β_m , tal que

$$Q(\beta_1, \dots, \beta_m) = G(\sigma_1, \dots, \sigma_m). \quad (3.39)$$

Por outro lado, temos

$$\sigma_1 = c^{-1}c_{m-1}, \sigma_2 = c^{-1}c_{m-2}, \dots, \sigma_m = c^{-1}c_0. \quad (3.40)$$

Logo, de (3.38), (3.39) e (3.40) segue que a expressão (3.37) é um inteiro divisível por p . Voltando a (3.36) concluímos que

$$\sum_{j=1}^m F(\beta_j) = pK_1, \quad (3.41)$$

onde K_1 é um inteiro cujo valor é irrelevante para nosso objetivo. A seguir, usando (3.35) e (3.41) obtemos que o lado esquerdo de (3.41) é um inteiro da forma

$$|kc^s c_0^p + pK|, \quad (3.42)$$

onde $K = c^s k_0 + K_1 l$. Agora escolhemos um número primo p de modo que ele seja maior que k , c e c_0 . Portanto, o inteiro (3.42) não é divisível por p , e, conseqüentemente é um inteiro não nulo.

Na conclusão da demonstração, precisamos realizar uma estimativa para o termo do lado direito de (3.30). Seja

$$M = \max\{|\beta_1|, \dots, |\beta_m|\}. \quad (3.43)$$

Logo,

$$\varepsilon_j \leq 2Me^M \frac{|c|^s}{(p-1)!} \sup |\lambda \beta_j|^{p-1} |R(\lambda \beta_j)|^p : 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (3.44)$$

Seja a seguir

$$N = \max\{|R(z)| : |z| \leq m\},$$

a qual usada em (3.44) fornece

$$\varepsilon_j \leq 2Me^M \frac{|c|^s}{(p-1)!} M^{p-1} N^p.$$

Como o fatorial domina qualquer exponencial, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^n}{n!} = 0;$$

para qualquer $A > 0$, segue que, para p suficientemente grande, podemos fazer $\varepsilon_j < \frac{1}{m+1}$. Logo,

$$\sum_{j=1}^m \varepsilon_j \leq \frac{m}{m+1} < 1. \quad (3.45)$$

A expressão (3.45) juntamente com o fato que o lado esquerdo de (3.30) é inteiro não nulo resulta em um absurdo. Logo, π é transcendente. \square

Há diversos outros números transcendentos, além dos números de Liouville e do número π , por exemplo o número de Euler (e) e a curiosa constante de Champernowne que contém todos os números inteiros em sua representação decimal.

Outras formas de conseguirmos números transcendentos é realizarmos operações de soma e produto entre números algébricos e números transcendentos. Assim, sendo a um número algébrico e t um número transcendente, os números $a + t$, $a - t$, $a \cdot t$, $\frac{a}{t}$ e $\frac{t}{a}$ com $a \neq 0$ são transcendentos.

Além disso, sejam t_1 e t_2 números transcendentos, pelo menos um dos números $t_1 + t_2$ e $t_1 - t_2$ é também transcendente. De fato, caso ambos fossem algébricos e pela propriedade de fechamento da adição no conjunto dos números algébricos, teríamos que o número $t_1 + t_2 + t_1 - t_2 = 2t_1$ seria algébrico e daí t_1 seria algébrico contrariando nossa hipótese.

A partir de alguns raciocínios análogos, temos que:

- . se t_1 e t_2 são transcendentos, pelo menos um dos números $t_1 + t_2$ e $t_1 \cdot t_2$ é também transcendente.
- . se t é transcendente, pelo menos um dos números t^t e t^{t+1} é transcendente.

Para maiores detalhes sobre as propriedades operacionais dos números algébricos e desses resultados citados, recomendamos a leitura de Teoria dos Números Transcendentes [[6]].

Curiosamente, apesar desses resultados é complicado sabermos quais dos números

3. Outros Números Transcendentes

obtidos das operações entre números transcendentos serão também números transcendentos. Por exemplo, apesar de sabermos que se π e e são transcendentos, pelo menos um dos números $\pi + e$ e $\pi \cdot e$ é também transcendente, não sabemos especificamente se $\pi + e$ é transcendente, e também não sabemos se $\pi \cdot e$ é transcendente.

Capítulo 4

Números na Educação Básica: Algumas Observações

Neste capítulo, apresentamos alguns aspectos relacionados aos números reais e outros conjuntos numéricos estudados na Educação Básica. Pretendemos fazer observações que ajudam a compreensão matemática e podem atuar como motivação para que estudantes compreendam melhor estes conjuntos, especialmente aqueles estudantes que estão no terceiro ano do Ensino Médio, assim, permitindo conhecer novos aspectos da matemática e adquirirem maiores elementos para suas perspectivas futuras na escolha de suas carreiras e no uso da matemática nelas. Apesar do aspecto curioso e não necessariamente aplicável dos resultados deste trabalho ele visa trazer mais um vislumbre da matemática e a usar a curiosidade como agente de pesquisa e busca por aprendizado. As referências curriculares nacionais [[2]] e [[3]] e o livro de Walle [[8]] combinado ao interesse na clareza do aspecto numérico de Elon L. Lima [[4]] nos motivaram a destacar essas recomendações e é recomendado principalmente aos professores de matemática as citadas leituras. A página Viagem ao Interior do Pi do site Atrator [[1]] é sugerida como atividade para despertar a curiosidade e motivação.

4.1 Base Nacional Comum Curricular

Recentemente, o Ministério da Educação (MEC) propôs a criação de uma Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para a elaboração dos currículos de todas as etapas da Educação Básica do País.

A BNCC é um documento plural e contemporâneo, fruto de um amplo processo de debate e negociação com diferentes atores do campo educacional e com a sociedade brasileira, sendo inspirada nas mais avançadas experiências do mundo.

A BNCC define as aprendizagens essenciais que devem ser desenvolvidas por todos

os alunos do país com o objetivo de promover uma melhoria na qualidade do ensino além de proporcionar um acesso igualitário a todos os conteúdos do ensino. A ideia é criar um guia para o desenvolvimento escolar garantindo a autonomia das instituições de ensino respeitando as particularidades regionais e locais.

Espera-se que com a BNCC, como referência nacional para a formação dos currículos de todas as redes de ensino e instituições públicas e particulares, ajude a superar a fragmentação das políticas educacionais. A BNCC é um instrumento fundamental para garantir um patamar comum de aprendizagem a todos os estudantes.

De acordo com a BNCC o desenvolvimento de dez competências gerais da Educação Básica devem ser assegurados aos estudantes. Essas competências gerais podem ser consultadas em [[2]]. Além dessas competências gerais a BNCC traz também as competências de acordo com a fase de ensino e também de acordo com as áreas de conhecimento, no âmbito do Ensino Médio, além da necessidade de universalizar o atendimento é necessário enfrentar o desafio de garantir a permanência e as aprendizagens dos estudantes, evitando uma abordagem distante das culturas juvenis e do mundo de trabalho. Diante desses aspectos a BNCC propôs uma nova estrutura que valoriza o protagonismo juvenil, prevendo a oferta de variados itinerários formativos, ratificando a organização do Ensino Médio por áreas do conhecimento: linguagens e suas tecnologias; matemática e suas tecnologias; ciências da natureza e suas tecnologias; ciências humanas e sociais aplicadas; e formação técnica e profissional.

Na área de matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio, a BNCC busca construir uma visão mais integrada da matemática com a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais previamente desenvolvidas da Educação Infantil até o nono ano do Ensino Fundamental.

As competências específicas de matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio e suas habilidades de acordo com a BNCC são:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
2. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos - Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística -, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Em [2] são apresentadas as habilidades relacionadas a cada competência, e a notação utilizada pela BNCC fornece a ordem recomendada de desenvolvimento para essas habilidades e competências.

Quanto especificamente aos números a BNCC traz como habilidades:

- . Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta, assim percebendo a necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta.
- . Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.

Além dessas, uma abordagem dos conjuntos numéricos com uma introdução a sua cardinalidade, pode ser utilizado como exemplo de bijeção em atividades complementares e diferenciadas, assim, auxiliando o desenvolvimento da habilidade algébrica trazida conforme trazida pela BNCC: compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

É percebido que os livros didáticos de matemática tem-se adaptado ao longo dos anos visando atender as necessidades de mudanças em nossa língua, das atualizações dos documentos norteadores como os parâmetros curriculares nacionais, e as exigências atuais pedagógicas. Os livros didáticos atendem parcialmente certas orientações da

BNCC, mas precisam ser adaptados para atender todas as recomendações da BNCC e assim promover o desenvolvimento das competências exigidas com suas habilidades. A divisão por áreas de conhecimento e uma abordagem explicitamente melhor e maior com intra disciplinaridade, interdisciplinaridade, aplicações na realidade juvenil e desenvolvimento de habilidades para o mercado de trabalho são as mudanças mais notórias trazidas pela BNCC.

Diante das considerações e itinerários formativos trazidos pela BNCC cria-se em espaço de possibilidades para, nesse novo âmbito, abordar e enfatizar melhor alguns tópicos referente a números. Nesse sentido trazemos nesse trabalho alguns aspectos pertinentes a aprendizagem de números e operações.

4.2 Conjuntos Numéricos

Na história da matemática, a necessidade de contagem traz o surgimento dos primeiros números: 1, 2, 3, ..., que chamamos números naturais. Durante utilização dos números naturais surge a necessidade de realizar operações elementares: como instrumento de facilitar a contagem, surgem duas operações binárias, a adição(+) e a multiplicação(\cdot). Quanto as essas operações elas possuem algumas propriedades de acordo com o conjunto numérico que estamos trabalhando.

Denotamos o conjunto dos números naturais como \mathbb{N} e, assim,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}.$$

Para as duas operações definidas acima são válidas as seguintes propriedades:

- **Fechamento:** $a + b \in \mathbb{N}$ e $a \cdot b \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{N}$;
- **Comutatividade:** $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$, $a, b \in \mathbb{N}$;
- **Associatividade:** $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $a, b, c \in \mathbb{N}$;
- **Elemento Neutro da Multiplicação:** Existe 1 tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, $a \in \mathbb{N}$;
- **Distributividade:** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Uma possibilidade de construção formal dos números naturais é usando os Axiomas de Peanos e através de algumas definições e postulados podemos demonstrar as propriedades enunciadas acima. Nesse trabalho, dado o objetivo de ser voltado para Educação Básica, vamos simplesmente adotá-las, mas o leitor interessado em se aprofundar mais pode consultar por exemplo [4].

Com o uso dos números naturais e a ideia da subtração, surge aos poucos a ideia de estender o conjunto dos números naturais de tal modo que este contenha números negativos. De fato, notamos que $3 - 5 \notin \mathbb{N}$ e, assim, surge a necessidade de estender o conjunto \mathbb{N} de modo a conter tais números. Construímos dessa forma, o conjunto dos números inteiros, isto é,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Em \mathbb{Z} , podemos estender as definições das operações de adição e multiplicação de modo que as propriedades listadas acima continuem verdadeiras. Além disso, neste caso obtemos duas propriedades adicionais:

- **Elemento Neutro da Adição:** Existe 0 tal que $0 + a = a + 0 = a$, $a \in \mathbb{N}$;
- **Elemento Inverso da Adição:** Existe $b = -a$ tal que $b + a = a + b = 0$, ou seja, $-a + a = a + (-a) = 0$, $a \in \mathbb{N}$.

Com esses elementos, podemos definir a subtração como $a - b = a + (-b)$. Podemos estender o conjunto dos números inteiros introduzindo os números da forma $\frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$. Dessa forma, o conjunto dos números racionais

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : \text{com } a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}.$$

No conjunto dos números inteiros todas as propriedades listadas acima continuam válidas e ainda vale a seguinte propriedade adicional:

- **Elemento Inverso da Multiplicação:** Para todo $q \in \mathbb{Q}, q \neq 0$, existe $p \in \mathbb{Q}$ denotado por $\frac{1}{q}$ tal que $qp = pq = 1$.

Na próxima seção, discutimos alguns aspectos relevantes sobre frações, números racionais e operações definidas nestes conjuntos.

Vamos agora considerar o conjunto dos números reais \mathbb{R} obtido como extensão do conjunto dos números racionais, isto é, o conjunto obtido incluindo os números irracionais ao conjunto dos números racionais. Não faremos a construção formal do conjunto dos números reais aqui, pois não é nosso objetivo. Destacamos que todas as propriedades listadas acima valem no conjunto dos números reais. Podemos provar outras propriedades interessantes dos números reais, que são importantes para auxiliarem no pensamento matemático na educação básica são:

- i. Para todo número real x , temos $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$. De fato, como 0 é o elemento neutro da adição, temos as seguintes igualdades

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$$

e

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$$

Assim,

$$0 \cdot x + (-0 \cdot x) = (0 \cdot x + 0 \cdot x) + (-0 \cdot x)$$

$$0 \cdot x + (-0 \cdot x) = 0 \cdot x + (0 \cdot x + (-0 \cdot x))$$

$$0 = 0 \cdot x + 0$$

$$0 = 0 \cdot x$$

Usando a propriedade comutativa do produto, ou realizando um processo análogo, obtemos que $0 = 0 \cdot x = x \cdot 0$.

- ii. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ temos que $x \cdot y = 0$ se, e somente se, $x = 0$ ou $y = 0$. De fato, suponhamos que $x \cdot y = 0$ com $x \neq 0$. Então, pela propriedade do inverso multiplicativo, existe único $\frac{1}{y} \in \mathbb{R}$ tal que $y \cdot \frac{1}{y} = 1$. Assim, $x \cdot y \cdot \frac{1}{y} = x \cdot 1 = x = 0$ e concluimos que $x = 0$ o que é uma contradição. Por outro lado, podemos supor sem perda de generalidade, $x = 0$, então do item (i) obtemos $x \cdot y = 0$.
- iii. Existe único $0 \in \mathbb{R}$ tal que $x + 0 = 0 + x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, suponhamos que existam 0 e $0'$ tais que para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $0 + x = x + 0 = x$ e $0' + x = x + 0' = x$. Então, $0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$ e, assim, concluimos que $0 = 0'$ e o elemento neutro da adição é único. Procedendo analogamente podemos mostrar que se 1 e $1'$ são ambos elementos neutros da multiplicação, então, $1 = 1 \cdot 1' = 1' \cdot 1 = 1'$. Portanto, o elemento neutro multiplicativo é único.
- iv. A unicidade do elemento inverso aditivo e multiplicativo pode ser obtida de forma análoga ao que fizemos para mostrar a unicidade do elemento neutro.

É de suma importância a compreensão dessas propriedades, elas acabam sendo utilizadas várias vezes de forma automática. Mas é preciso conhecê-las e compreendê-las para não cometer enganos.

A partir das extensões realizadas temos as seguintes relações de inclusão entre os conjuntos numéricos

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

onde cada inclusão é própria, ou seja, existe $-1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, do mesmo modo, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Nem sempre são destacados claramente esses fatos, até por serem aceitos naturalmente dadas as apresentações dos conjuntos na Educação Básica. Em particular, não é tratado na Educação Básica que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sendo esta também uma inclusão própria.

Ao estudarmos um pouco da história da matemática, principalmente ao que se refere a Escola Pitagórica, vemos que a descoberta dos irracionais causou um grande impacto, mudando a forma de pensar a matemática. Um exemplo de número, cuja descoberta é atribuída aos pitagóricos, que pertence ao conjunto dos números reais (\mathbb{R}) mas não pertence ao conjunto dos números racionais \mathbb{Q} é o $\sqrt{2}$. Uma maneira de pode motivar a apresentação dos números irracionais aos estudantes é o problema clássico de obter a medida da diagonal de um quadrado de lado 1. Usando o Teorema de Pitágoras, podemos obter o número x tal que $x^2 = 2$ denotado por $x = \sqrt{2}$ e demonstrar a sua irracionalidade. Usamos o fato que o quadrado de um número par (ímpar) é par (ímpar) e o conceito de frações irredutíveis (ver [6], por exemplo).

Assim, podemos afirmar que podemos dividir os números reais em dois subconjuntos, tais que todo número real é elemento de apenas um desses subconjuntos, isto é, $\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Denotamos por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ o conjunto dos números irracionais. Uma forma alternativa de descrever o conjunto dos números reais como união de dois subconjuntos disjuntos é considerar o conjunto dos números algébricos e o conjunto dos números transcendentais.

4.3 Os Números Algébricos - O ϕ (ϕ)

Entre diversos números algébricos que podem ser apresentados aos estudantes, com destaque aos números irracionais, destacamos aqui um exemplo particularmente interessante de número algébrico, o número ϕ (ϕ). O número ϕ é algébrico, pois conforme veremos o mesmo é solução da seguinte equação:

$$x^2 - x - 1 = 0. \quad (4.1)$$

Para mostrar isso, vamos primeiro definir o número ϕ e mostrar que a Equação (4.1) nos ajudará a obter o seu valor.

Dizemos que um segmento é áureo se existe um ponto neste segmento que o divide em dois de tal modo que a razão entre o todo (o segmento) e a parte maior é a mesma razão existente entre a parte maior e a parte menor, ou seja, denotando a como a parte maior e b como a parte menor, então o segmento tem medida $a + b$ e

$$\frac{a + b}{a} = \frac{a}{b} \quad (4.2)$$

O número ϕ é definido como a constante da razão áurea, isto é,

$$\frac{a + b}{a} = \frac{a}{b} = \phi \quad (4.3)$$

Assim, $a = b\varphi$ e, portanto,

$$\frac{b\varphi + b}{b\varphi} = \frac{b\varphi}{b} \quad (4.4)$$

Colocando b em evidência e depois simplificando obtemos

$$\frac{\varphi + 1}{\varphi} = \varphi \quad (4.5)$$

e, assim,

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0. \quad (4.6)$$

Concluimos que φ é algébrico e resolvendo a equação do segundo grau em φ , descartando o valor negativo, pois estamos trabalhando com razões entre medidas de comprimento, obtemos que

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (4.7)$$

Esse processo quando previamente motivado pelos padrões da razão áurea e suas aplicações no desenvolvimento de produtos, artes e fenômenos da natureza proporciona mais um exemplo da presença de um número irracional e algébrico em nosso cotidiano.

Sugerimos solicitar que os estudantes realizem uma pesquisa e depois mostrar em sala de aula como obter o valor de φ conforme fizemos ou de algum modo análogo.

Observe que o número φ é irracional, basta tomarmos a propriedade demonstrada no Teorema 2.1 e aplicar à (4.7).

4.4 O Número π

O número π possui algumas características curiosas. Vamos destacar agora um exemplo que pode despertar a curiosidade matemática: Qual a probabilidade de encontrarmos um número inteiro qualquer dentro da sequência de algarismos da escrita do número π ?

A primeira vista podemos pensar de que para alguns números específicos essa probabilidade é zero. Porém este fato pode ser testado usando a página Viagem ao Interior do π , do site Atractor, cujo endereço é encontrado em [[1]].

O site afirma que existe a possibilidade do número π conter qualquer número inteiro em sua escrita, claro que quanto maior o número inteiro precisaremos de um número cada vez maior de casas decimais do número π para encontrarmos, se existir, a primeira ocorrência.

Considerando esse aspecto curioso acerca do número π , poderíamos indicar aos estudantes que pesquisem utilizando a página citada: seus anos de nascimento, suas

datas de aniversário, o número de sua casa, o CEP de seu endereço, e até mesmo seu número de CPF ou outros números arbitrariamente escolhidos por eles.

Por exemplo, ao se procurar o número 123456789, o site retorna que a primeira ocorrência foi encontrada na 523551502 posição decimal de π e exibe a vizinhança da ocorrência:

$$\begin{array}{c} \cdots 4918141256218476314772604899173238892072 \\ 123456789 \\ 2248644818807048671002472728100751989546 \cdots \end{array}$$

O site nem sempre encontrará o valor procurado, o que pode ocorrer devido a possibilidade de não existência desse valor, ou da limitação do site que contém apenas 2147483000 casas decimais de π .

Há outros recursos na página que nos permite gerar um postal com o número procurado dentro do número π imprimindo uma página de números com sua vizinhança e destacando o número procurado. Além disso, é apresentada uma explicação sobre as probabilidades de encontrarmos um número entre as casas decimais do número π , inclusive quando o mesmo está escrito em outras bases, e não apenas no sistema decimal.

Existe um outro número transcendente que contém todos os números inteiros em sua representação decimal. Este número é chamado o número de Champernowne e obtido escrevendo as sequências de números inteiros em base 10:

$$0,123456789101112131415161718192021 \cdots$$

Outro aspecto da transcendência do número π está relacionado a um problema grego da antiguidade, o de construir usando uma régua sem marcas e um compasso, um quadrado com área igual à de um círculo dado. E cuja impossibilidade de construção é decorrente da transcendência de π . Maiores informações sobre este problema e sua relação com a transcendência do número π podem ser consultadas em [[6]] e [[7]].

4.5 Considerações Finais

Há um vasto conjunto de possibilidades de ensino, para que os números se tornem ainda mais perspectiveis em nossas vidas, e com isso a matemática se torna mais acessível e interessante.

Por exemplo, somos fruto dessas possibilidades, foi bastante enriquecedor o trabalho com esse tema para essa dissertação, pois proporcionou excelentes leituras e permitir

compreender melhor as relações entre operações, conjuntos numéricos, álgebra e as características inerentes em cada um desses aspectos.

Diante disso, compartilhamos da crença de que a matemática possa continuar a ser utilizada com suas aplicações, mas não fique limitada apenas as aplicações, pois a pesquisa em matemática pura rende bons frutos, que podem ser trabalhados no ensino e trazerem resultados importantes para o desenvolvimento de aplicações e avanço da matemática e ciências em geral.

Referências Bibliográficas

- [1] ATRACTOR, *Viagem ao Interior do Pi*. 2000. Disponível em: <http://www.atractor.pt/mat/fromPI/PIsearch.html>. Acesso em: 31 de julho de 2018.
- [2] BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, *Base Nacional Curricular Comum (BNCC)*. 2018. Disponível em: basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site.pdf. Acesso em: 06 de outubro de 2018.
- [3] BRASIL, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL, *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (3o e 4o ciclos do Ensino Fundamental)*. Brasília: SEF/MEC, 1998.
- [4] E. L. LIMA, *Um curso de Análise: Vol 1*. 14.ed., Rio de Janeiro: SBM (IMPA), 2013.
- [5] D. J. FIGUEIREDO, *Números Irracionais e Transcendentes*. 3.ed. Rio de Janeiro: SBM (Coleção de Iniciação Científica; nº 1), 2011.
- [6] D. MARQUES, *Teoria dos Números Transcendentes*. Rio de Janeiro: SBM. (coleção Textos Universitários; nº 14), 2013.
- [7] I. NIVEN, *Números: Racionais e Irracionais*. Rio de Janeiro: SBM (Coleção de Iniciação Científica; nº 2), 1990.
- [8] J. A. V. DE WALLE, *Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicações em sala de aula*. Tradução Paulo H. Colonese. 6.ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.
- [9] J. M. DE OLIVEIRA, *A Irracionalidade e Transcendência do Número Pi*. 2013. 43f. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. 2013.

- [10] J. P. DE O. SANTOS, *Introdução à Teoria dos Números*. 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA (coleção Matemática Universitária), 2015.
- [11] M. S. MONTEIRO, *Enumeráveis: Conjuntos Infinitos*. 2016. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~martha/mat0315/enumeraveis.pdf>. Acesso em: 31 de julho de 2018.
- [12] W. DUNHAM, *Journey through genius: the great theorems of mathematics*. John Wiley & Sons, Inc. Estados Unidos, 1947.